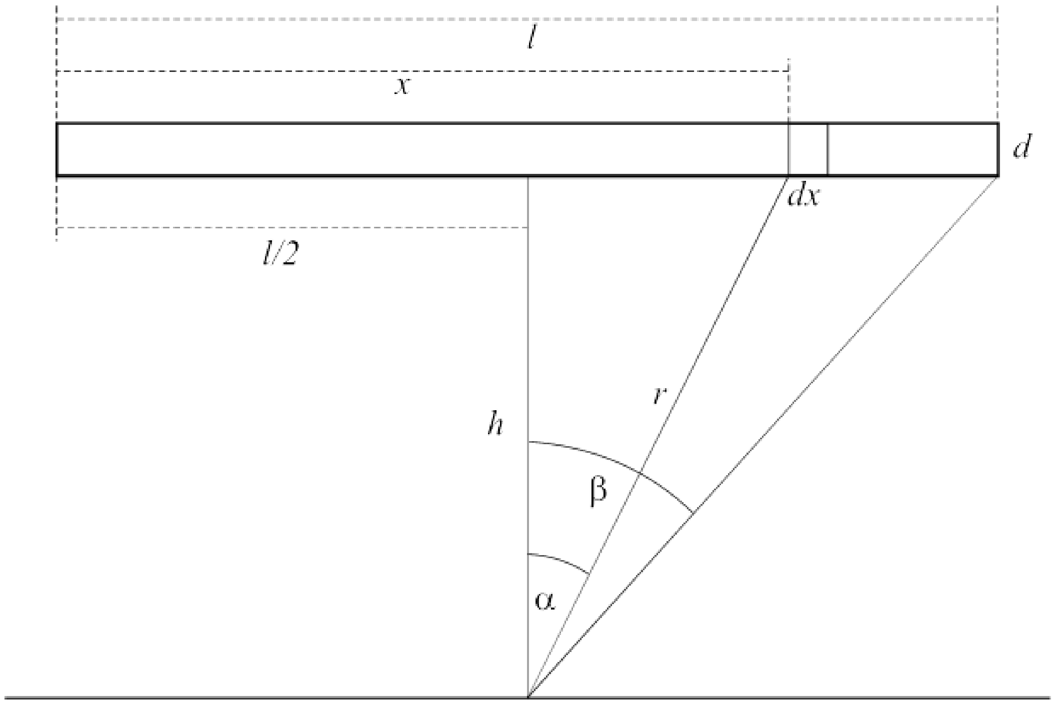
Osvětlení zářivkou

Formulace problému:

Hledáme osvětlení desky stolu pod středem vodorovně umístěné zářivky délky 120 cm, jejíž celkový světelný tok je 2000 lm, která je ve výšce 2 m nad stolem. Vnější průměr zářivky je 38 mm.



Z odvození světlení $\Phi = \pi L S = \pi L(\pi\, l\, d) = \pi^2 L\, l\, d$ (1)

Definice $L_0 = \frac{I_0}{S_1}$,

kde S_1 je viditelná plocha zářivky $S_1 = l\, d$

Lambert - kosinový zářič $L = L_0$

Z rovnice (1)

$$\Phi = \pi^2 \frac{I_0}{l\, d} l\, d = \pi^2 I_0$$

$$I_0 = \frac{\Phi}{\pi^2}$$

$$dI_0 = \frac{I_0}{l} dx = \frac{\Phi}{\pi^2 l} dx$$

Tím jsme získali kolmou svítivost délkového elementu zářivky.

Přejdeme na osvětlení středu stolu. Z teorie osvětlení pro šikmé osvětlení bodovým zdrojem (využijeme $dI = dI_0 \cos\alpha$):

$$dE = \frac{dI\cos\alpha}{r^2} = \frac{dI_0\cos\alpha\cos\alpha}{r^2} = \frac{dI_0\cos^2\alpha}{r^2}$$

$$dE = \frac{\frac{\Phi}{\pi^2 l}dx\cos^2\alpha}{r^2} = \frac{\Phi}{\pi^2 l}\frac{\cos^2\alpha}{r^2}dx$$

Z obrázku převedeme dx na $d\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{x - \frac{l}{2}}{h} \qquad \text{derivací } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{h}\frac{dx}{da} \qquad dx = \frac{h}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Pokračuji v řešení dE:

$$dE = \frac{\Phi}{\pi^2 l}\frac{\cos^2\alpha}{r^2}\frac{h}{\cos^2\alpha}d\alpha =$$

$$= \frac{\Phi}{\pi^2 l}\frac{h}{r^2}d\alpha = \frac{\Phi}{\pi^2 l}\frac{h}{h^2}\cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{\Phi}{\pi^2 l h}\cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$E = \frac{\Phi}{\pi^2 l h}\int_{-\beta}^{\beta}\cos^2\alpha\, d\alpha$$

Řešení integrálu

– –

$$\int\cos^2 x\, dx = \int(1-\sin^2 x)dx = \int dx + \int\sin^2 x\, dx =$$

$$= x + \int\sin^2 x\, dx$$

$$|u = \sin x \qquad v' = \sin x \qquad u' = -\cos x \qquad v = \cos x|$$

$$\int\sin^2 x dx = \sin x\cos x + \int\cos^2 x$$

$$\int\cos^2 x dx = x + \sin x\cos x - \int\cos^2 x$$

$$2\int\cos^2 x dx = x + \sin x\cos x$$

$$\int\cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x)$$

– –

Dořešíme osvětlení ve středu stolu od celé délky zářivky (tj. integrujeme od $-\beta$ do β)

$$E = \frac{\Phi}{\pi^2 l h}[\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha + \alpha)]_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= \frac{\Phi}{\pi^2 l h}[\frac{1}{2}(\frac{2hl}{l^2+4h^2} + \beta - (-\frac{2hl}{l^2+4h^2}) - (-\beta))]$$

$$\underline{E = \frac{\Phi}{\pi^2 l h}(\frac{2hl}{l^2+4h^2} + \arctan\frac{l}{2h}) = 97\,\mathrm{lx}}$$